Динамические системы, вып. 26 (2009), 51–62

УДК 519.71

Идентификация стационарных LQ-моделей с неизвестными управлениями в трёхмерном фазовом пространстве

А.М. Назаренко, Д.В. Фильченко

Сумской государственный университет,
Сумы 40007. *E-mail: dm.filchenko@yahoo.com*

Аннотация. Предложена методика спецификации и идентификации стационарных линейно-квадратических моделей динамических систем в трёхмерном фазовом пространстве. Оценивание параметров дифференциальных уравнений проведено с помощью метода коллокации. Для корректной настройки модели разработана схема мультикритериального регулятора, действующего по принципу обратной связи. Все методы и модели апробированы на реальных статистических данных.

Ключевые слова: LQ-модель, спецификация, параметрическая идентификация, мультикритериальный регулятор, обратная связь.

1. Введение

Центральной идеей современного системного анализа является изучение свойств реальных систем с помощью их математических абстракций — динамических моделей, представленных в виде дифференциальных или дифференциально-алгебраических уравнений. Однако решению прямой задачи, как правило, предшествует решение обратной задачи динамики, которая состоит в восстановлении закона движения динамической системы по имеющимся эмпирическим данным [6, 12].

Математически это означает следующее. Пусть в некоторых точках отрезка $[\tau_0,\, \tau_1]$ из исследуемого промежутка времени $[\tau_0,\, \tau_k]$ имеется статистическая информация $\{\mathbf{x}_\tau\}$ о динамике вектора $\mathbf{x}$ фазовых координат в пространстве E^m. Данные $\{\mathbf{u}_\tau\}$ о динамике вектора $\mathbf{u}$ управляющих переменных в пространстве E^r могут отсутствовать. Необходимо построить закон движения динамической системы в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\, \mathbf{u}(\tau)\,|\,\boldsymbol{\theta}_1),\ \mathbf{x}(\tau_*) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau),\, \mathbf{u}(\tau)\,|\,\boldsymbol{\theta}_2),\ \mathbf{u}(\tau_*) = \mathbf{u}_*, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_1$ — векторы неизвестных коэффициентов, подлежащих идентификации. Граничные значения $\mathbf{x}_*$ и $\mathbf{u}_*$ задаются в некоторой точке $\tau_* \in [\tau_0,\, \tau_k]$ и часто считаются дополнительными неизвестными коэффициентами [13]. Спецификация вектор-функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ может быть как априорной (для слабо формализованных

© *А.М. НАЗАРЕНКО, Д.В. ФИЛЬЧЕНКО*

систем) [8], так и апостериорной (если физика процесса или предварительный анализ данных указывают на конкретный вид функциональной формы) [13].

Если возможно собрать информацию о динамике вектора управлений $\mathbf{u}(t)$, то для параметрической идентификации модели (1.1) используют ряд классических методов. Условно их можно разделить на четыре группы: дифференциально-разностные схемы, интегральные схемы [1, 12], нелинейные регрессионные методы [10] и методы коллокации [13]. Считается, что именно последняя группа методов является оптимальным компромиссом между универсальностью и эффективностью в использовании. К тому же, методы коллокации по своей сути близки к методам разложения траектории движения на составляющие, что делает их важным инструментом анализа временных рядов [11].

Главной проблемой задачи параметрической идентификации модели (1.1) является чувствительность полученного решения к малым изменениям входной информации. Поэтому обратные задачи динамики относят к классу некорректно поставленных [4, 6, 9]. Более того, на практике информация о динамике вектора управлений $\mathbf{u}(t)$ может вообще отсутствовать. В этом случае некорректность задачи усиливается, а традиционные методы параметрической идентификации становятся неприменимыми.

Для доопределения задачи рассмотрим скалярную функцию F, задающую поверхность, вдоль которой движется исходная динамическая система. Конструировать функцию F необходимо таким образом, чтобы она аккумулировала всю предысторию движения фазовых координат и управлений, а также выступала в качестве агрегированной глобальной характеристики движения:

$$\dot{F}(\tau) = h(\mathbf{x}(\tau),\, \mathbf{u}(\tau)\,|\,\boldsymbol{\theta}_3),\;\; F(\tau_*) = F_*, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\theta}_3$ — вектор неизвестных коэффициентов, подлежащих идентификации. Скалярную величину F, движение которой задаётся уравнением (1.2), иногда называют функцией качества или функцией производительности системы (performance fucntion) [5]. Будем предполагать, что на промежутке $[\tau_0,\, \tau_1]$ доступна информация F_τ о динамике величины F.

Следует ожидать, что рациональная спецификация функции F регуляризирует исходную задачу [9]. К тому же, модель в форме (1.1), (1.2) может оказаться полезной для постановки задачи оптимального управления, в которой некоторый функционал от F может выступать в качестве целевого [5].

2. Постановка задачи

Цель данной работы заключается в отыскании такого непрерывно дифференцируемого управления $\mathbf{u}(t)$ и параметров модели (1.1), (1.2), чтобы при переведении системы из некоторого начального состояния в момент времени τ_0 в конечную желаемую точку $(\mathbf{x}_*, F_*)$ модельные траектории фазовых координат $\mathbf{x}$ и функции качества F (непрерывно дифференцируемые функции) обладали рядом свойств:

а) соотношения $\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{x}_\tau$ и $F(\tau) \approx F_\tau$ выполняются с высокой точностью в

дискретном наборе точек отрезка $[\tau_0,\, \tau_1]$ в смысле евклидовой L^2-нормы;

б) доверительные интервалы прогнозов фазовых координат $\mathbf{x}(\tau)$ и функции качества $F(\tau)$ имеют минимальную длину;

в) оценки неизвестных коэффициентов как можно менее чувствительны к незначительным изменениям входной информации;

г) управление $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет определённым ограничениям, которые неизбежно возникают в ходе решения.

Некоторые из этих свойств на практике являются конкурирующими. Поэтому возникает необходимость в построении такого мультикритериального регулятора, действующего по принципу обратной связи [3, 12], который позволил бы настроить рассматриваемую модель на указанный набор свойств.

При численной реализации моделей, целью которых есть прогнозирование или оптимизация, граничные условия дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) удобно удовлетворять в момент времени, следующий за периодом идентификации. В данной работе идентификация уравнений осуществляется на промежутке $[\tau_0,\, \tau_1]$, в N целочисленных точках которого имеется необходимая статистическая информация. Поэтому в качестве τ_* удобно выбрать момент времени τ_1+1. Сделав замену $t = \tau - \tau_*$, идентификацию модели можно проводить на $[-N, -1]$, а прогнозирование или оптимизацию — на $[0,\, \tau_k - \tau_*]$. В частности, граничные условия для дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) будут удовлетворяться в точке $t = 0$.

В данной работе исследование проводится в рамках стационарной автономной линейно-квадратической (LQ) модели с неизвестными управлениями $\mathbf{u}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{a}_0,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{u}}(t) = D\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}_0,\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_*, \\ \dot{F} = h(\mathbf{x},\, \mathbf{u}),\ F(0) = F_*. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь A, D — неизвестные матрицы, B — неизвестная симметричная невырожденная матрица, $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{d_0}$ — неизвестные векторы-столбцы; $h(\cdots)$ — функция, подлежащая спецификации и содержащая линейные, квадратичные или билинейные формы по своим аргументам. Что касается размерности модели, то на практике размерность фазового пространства выбирают из условия $m \geq 3$ для получения свойств реальных динамических систем [2]. Далее рассмотрен случай $m = 3$ и $r = 3$.

3. Метод решения

Предложенный в данной работе метод идентификации дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) по своей сути относится к классу коллокационных методов, главная идея которых заключается в разложении переменных дифференциальных уравнений по базисным функциям [12, 13].

3.1. Идентификация уравнений для фазовых координат и управлений

Следуя известным методам выделения в рядах динамики неслучайных составляющих [11], будем предполагать трёхкомпонентую аддитивную схему разложения фазовой траектории (при добавлении шумов $\varepsilon_i(t)$ получается реальная траектория):

$$x_i(t) = x_{\text{тр}_i}(t) + x_{\text{п}_i}(t) + x_{\text{сез}_i}(t),\ i = 1,\ 2,\ 3, \tag{3.1}$$

где $x_{\text{тр}_i}(t)$ — трендовая, $x_{\text{п}_i}(t)$ — периодическая, $x_{\text{сез}_i}(t)$ — сезонная компоненты. В данной работе в качестве $x_{\text{тр}_i}(t)$ предлагается выбрать экспоненциальный тренд, в качестве $x_{\text{п}_i}(t)$ — гармоническую функцию (колебание с постоянной амплитудой и частотой w), а в качестве $x_{\text{сез}_i}(t)$ — смешанную периодику (колебание с переменной амплитудой и частотой μ).

Общее решение системы первых двух дифференциальных уравнений из (2.1) можно записать в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{c}_2 e^{\nu_1 t}\cos\omega t + \mathbf{c}_3 e^{\nu_1 t}\sin\omega t + \mathbf{d}_1 e^{\lambda_2 t} + \mathbf{d}_2 e^{\nu_2 t}\cos\mu t + \mathbf{d}_3 e^{\nu_2 t}\sin\mu t.$$

Однако такое представление содержит много управляющих параметров (λ_1, λ_2, ν_1, ν_2, ω, μ) и практическая идентификация будет сопряжена с огромными трудностями. Компьютерная реализация указывает на необходимость присутствия в модели не более трёх управляющих параметров. Поскольку частоты колебаний системы и управлений должны присутствовать в модели, то из четырёх параметров экспонент выбираем обобщенный экспоненциальный параметр. В результате представляется оптимальным следующее разложение:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\cos wt + \mathbf{n}_3\sin wt + \mathbf{m}_1 e^{\lambda t} + \mathbf{m}_2 e^{\lambda t}\cos\mu t + \mathbf{m}_3 e^{\lambda t}\sin\mu t,$$

или

$$\mathbf{x}(t) = N\mathbf{f} + M\mathbf{g}e^{\lambda t}, \tag{3.2}$$

$N = [\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2,\ \mathbf{n}_3]$, $M = [\mathbf{m}_1,\ \mathbf{m}_2,\ \mathbf{m}_3]$, $\mathbf{f} = (1,\ \cos wt,\ \sin wt)'$, $\mathbf{g} = (1,\ \cos\mu t,\ \sin\mu t)'$.

При фиксированных значениях частот w, μ и параметра λ неизвестные коэффициенты разложения (3.2) можно оценить в рамках метода наименьших квадратов (МНК) для линейных регрессий. Оценкой граничного значения $\mathbf{x}_*$ будет выступать прогнозное значение уравнения регрессии $\mathbf{x}_* = N\mathbf{f}(0) + M\mathbf{g}(0)$.

Учитывая разложение (3.2), не трудно проверить, что

$$\dot{\mathbf{x}} = NJ_w\mathbf{f} + MJ_\mu\mathbf{g}e^{\lambda t},$$

$$J_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w \\ 0 & w & 0 \end{bmatrix},\ J_\mu = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & \mu & \lambda \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, из (2.1) $\dot{\mathbf{x}} = AN\mathbf{f} + AM\mathbf{g}e^{\lambda t} + B\mathbf{u} + \mathbf{a_0}$. Далее теоретически возможны два случая.

1. Управление $\mathbf{u}(t)$ полностью формирует тренд и сезонную составляющую разложения (3.1). Отсюда следует, что

$$A = NJ_wN^{-1} \text{ при } \det(N) \neq 0, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{z} \equiv B\mathbf{u} + \mathbf{a}_0 = (MJ_\mu - AM)\mathbf{g}e^{\lambda t}. \tag{3.4}$$

Здесь переменная $\mathbf{z}(t)$, введённая для удобства дальнейших выкладок, даёт ценную информацию о виде дифференциального уравнения для управления $\mathbf{u}(t)$. Так, из выражения (3.4) видно, что $\dot{\mathbf{z}} = (MJ_\mu - AM)J_\mu\mathbf{g}e^{\lambda t}$, а значит, переменная $\mathbf{z}(t)$ удовлетворяет однородной задаче Коши

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{z}} = R\mathbf{z},\ \mathbf{z}(0) = (MJ_\mu - AM)\mathbf{g}(0),\\ R = (MJ_\mu - AM)J_\mu(MJ_\mu - AM)^{-1} \text{ при } \det(MJ_\mu - AM) \neq 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

2. Управление $\mathbf{u}(t)$ полностью формирует периодическую компоненту разложения (3.1). Аналогичные выкладки приводят к следующему результату:

$$A = MJ_wM^{-1} \text{ при } \det(M) \neq 0, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{z} = (NJ_w - AN)\mathbf{f}, \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{z}} = R\mathbf{z},\ \mathbf{z}(0) = (NJ_w - AN)\mathbf{f}(0),\\ R = (NJ_w - AN)J_w(NJ_w - AN)^{-1} \text{ при } \det(NJ_w - AN) \neq 0.\end{gathered} \tag{3.8}$$

В обоих случаях, очевидно, управление $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет неоднородной задаче Коши

$$\dot{\mathbf{u}} = B^{-1}RB\mathbf{u} + B^{-1}R\mathbf{a_0},\ \mathbf{u}(0) = B^{-1}(\mathbf{z}(0) - \mathbf{a}_0).$$

Сравнивая полученный результат с искомой моделью (2.1), заключаем, что

$$D = B^{-1}RB,\ \mathbf{d_0} = B^{-1}R\,\mathbf{a}_0 = DB^{-1}\mathbf{a}_0. \tag{3.9}$$

Если $\det(B) \neq 0$, то, сделав замену $\boldsymbol{\alpha}_0 = B^{-1}\mathbf{a}_0$, окончательно приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*,\\ \dot{\mathbf{u}} = D(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0),\ \mathbf{u}(0) = B^{-1}\mathbf{z}(0) - \boldsymbol{\alpha_0},\end{cases} \tag{3.10}$$

в которой неопределёнными остались матрица B и вектор $\boldsymbol{\alpha}_0$.

3.2. Спецификация и идентификация функции качества

Теорема. *Если $D = -A'$ и $B = B'$, то система (3.10) является гамильтоновой.*

Доказательство. Поскольку рассматриваемая динамическая система автономна, то её гамильтониан $H(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, если он существует, является первым интегралом системы дифференциальных уравнений (3.10), т.е функцией, принимающей постоянное значение вдоль любого решения системы (3.10) [3, 5]. Умножим скалярно первое уравнение (3.10) на $\dot{\mathbf{u}}$, а второе — на $\dot{\mathbf{x}}$ и найдём разность получившихся уравнений:

$$\dot{\mathbf{u}}'A\mathbf{x} + \dot{\mathbf{u}}'B(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0) + \dot{\mathbf{x}}'A'(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0,\ H(\mathbf{x},\mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}'\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{u}'B\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0'A\mathbf{x}. \tag{3.11}$$

Итак, на траекториях, задаваемых системой (3.10), $H(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathrm{const}$ при $D = -A'$. Проверка показывает, что

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}'},\ \dot{\mathbf{u}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}'},$$

а значит, система (3.10) при $D = -A'$ и $B = B'$ действительно является гамильтоновой, что и требовалось доказать. □

В задачах оптимального управления гамильтоновы системы возникают при решении по принципу максимума Понтрягина. В этом случае, учитывая (3.11), можно рассмотреть скалярную функцию $G(\mathbf{x},\,\mathbf{u}) = \boldsymbol{\alpha}_0'A\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}'B\mathbf{u}$ как возможную подынтегральную функцию целевого функционала задачи оптимизации [5]. В координатах $(\mathbf{x},\,\mathbf{z})$ при $D = -A'$ получим следующее представление:

$$G(\mathbf{x},\,\mathbf{z}) = b_0 + \boldsymbol{\alpha}_0'\dot{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\mathbf{x}'K\mathbf{z}),\ K \equiv B^{-1}. \tag{3.12}$$

Анализируя размерность правых частей в (3.10), (3.12), не трудно заметить, что размерность величины G равна квадрату размерности фазовых координат, делённому на время. Поскольку на практике реальные величины с такой размерностью встречаются крайне редко, перейдём к вспомогательной величине Y, имеющей размерность фазовых координат и являющейся некоторой общей характеристикой динамической системы. Тогда функцию G можно представить, например, в виде $G = k\dot{Y}Y$, где $k > 0$ - некоторый безразмерный коэффициент. После интегрирования выражения (3.12) приходим к следующему результату:

$$F \equiv k\frac{1}{2}Y^2 = c_0 + b_0 t + \boldsymbol{\alpha}_0'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'K\mathbf{z}. \tag{3.13}$$

Дифференцирование (3.13) на интервале $(-N,\,0)$ приводит к задаче Коши для функции качества (3.12):

$$\dot{F} = b_0 + \boldsymbol{\alpha}_0'\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{z}'K\mathbf{z} - \frac{1}{2}\mathbf{z}'K(A + D')\mathbf{x},\ F(0) = F_*. \tag{3.14}$$

Запись функции качества F в форме (3.13) удобна для идентификации, поскольку она содержит известные величины $\dot{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{z}$. Более того, неизвестными параметрами в (3.13) выступают именно те, которых не доставало для доопределения системы (3.10) (матрица $B = K^{-1}$ и вектор $\boldsymbol{\alpha}_0$).

Следует отметить, что при идентификации модели (3.13) необходимо учитывать некоторые ограничения на управление $\mathbf{u}(t)$.

Во-первых, в задачах оптимального управления [5] и для многих физических систем [3] матрица K модели (3.16) должна быть положительно определенной.

Во-вторых, следуя физической интерпретации управлений, логично ввести ограничения на управление $\mathbf{u}(t)$ в виде

$$\max_i \left|\frac{u_i(t)}{x_i(t)}\right| \le l,\ t \in [-N,\, 0], \tag{3.15}$$

где l — наперёд заданное число. Условие (3.15) можно удовлетворить, варьируя значение коэффициента пропорциональности k из (3.13).

В-третьих, в данной работе предлагается искать управление, для которого условие на правом конце принимает вид $\mathbf{u}(0) = 0$. При таком подходе подразумевается, что после достижения цели исследования управления „угасают“ в точке $t = 0$. Тогда вектор $\boldsymbol{\alpha}_0$ и матрица K модели (3.13) будут связаны между собой соотношением $\boldsymbol{\alpha}_0 = K\mathbf{z}(0)$. Итак, модель (3.13) для идентификации функции качества окончательно принимает вид

$$F \equiv k\frac{1}{2}Y^2 = c_0 + b_0 t + (\mathbf{z}_0' - \frac{1}{2}\mathbf{z}')K\mathbf{x}. \tag{3.16}$$

3.3. Конструирование регулятора и обратной связи

При заданных частотах w, μ и параметре λ идентификация модели (3.10), (3.14) проходит в два этапа: сначала по методологии раздела 3.1 определяются параметры A, $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{z}(0)$ модели (3.10), а затем по методологии раздела 3.2 — параметры B, $\boldsymbol{\alpha}_0$ модели (3.16).

Однако напомним, что модель (3.10), (3.14) должна обладать рядом свойств, описанных в разделе 2. Для их выполнения построим схему регулятора, вырабатывающего в силу принципа обратной связи на основе текущих выходов такие входы в систему, которые обеспечивают заданный мультикритерий [3, 12]. Самыми известными мультикритериальными регуляторами в теории управления являются PI- и PID-регуляторы, в которых мультикритерий задаётся в виде суммы локальных критериев с заданными приоритетами (коэффициентами усиления) [12]. Адаптируя требования раздела 2 к предложенной в данной работе методологии идентификации модели (3.10), (3.14), получим следующий набор локальных критериев.

1. Показателем качества аппроксимации исходных данных удобно выбрать коэффициенты детерминации R^2 моделей (3.2) и (3.16), поскольку идентификация моделей проводится с помощью МНК [7].

2. Прогнозные свойства моделей будем характеризовать с помощью доверительных интервалов прогнозов. В работе миниизируются длины следующих интервалов прогнозов:

$$x_i(0) \in (n_{i1} + n_{i2} + m_{i1} + m_{i2} - \delta_i t_\alpha,\ n_{i1} + n_{i2} + m_{i1} + m_{i2} + \delta_i t_\alpha),\ i = 1,\, 2,\, 3. \tag{3.17}$$

Здесь n_{i1}, n_{i2} и m_{i1}, m_{i2} — элементы матриц N и M разложения (3.2) соответственно; δ_i — среднеквадратическая ошибка предсказания $x_i(0)$; t_α — двусторонний квантиль распределения Стьюдента с заданными уровнем значимости α и

числом степеней свободы [7].

3. Чувствительности МНК-оценок моделей (3.2), (3.16) предлагается анализировать по следующей схеме. После первоначального оценивания параметров проводится рафинирование регрессионных моделей (последовательное отбрасывание незначимых коэффициентов при заданном уровне значимости α). Далее минимизируется индекс обусловленности CI информационной матрицы уравнения регрессии как показатель чувствительности МНК-оценок к малым изменениям входной информации [10].

4. Регулятор системы должен выбрать такой класс симметричной матрицы K, чтобы она была строго положительно определенной. Помимо этого регулятор должен выполнять роль обработчика исключительных ситуаций (exception handling). Они могут возникнуть, если в результате рафинирования модели становятся вырожденными некоторые матрицы, для которых была предположена невырожденность в разделе 3.1.

Объединяя, изложенные локальные критерии в единый мультикритерий с заданными приоритетами (коэффициентами усиления), получим классическую схему регулятора, изображенную на рис. 1.

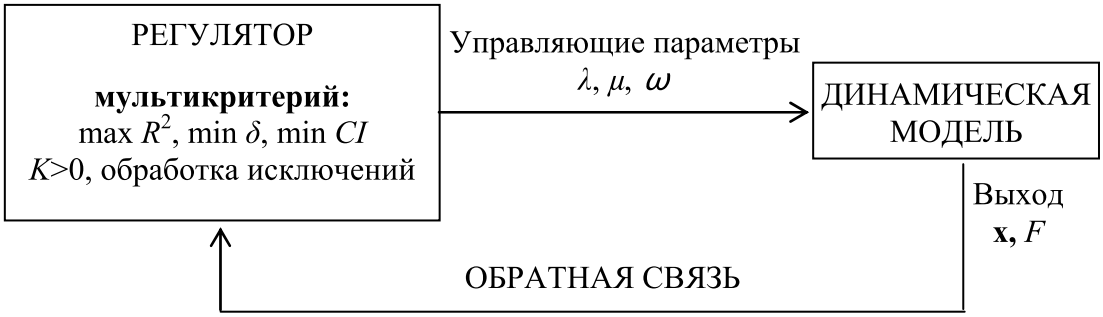


Рис. 1. Схема мультикритериального регулятора и принципа обратной связи

4. Численный эксперимент

Проблема идентификации LQ-моделей встречается в химической инженерии, нейробиологии, компьютерной томографии [6, 13], экономическом анализе [5, 14]. В данной работе апробация предложенных моделей и методов проводится на рядах динамики реальных макроэкономических систем. Рассмотрим макроэконормическое развитие США за период времени 1971-1998 (базовый период, $N = 28$). В качестве фазовых координат предлагается выбрать потребительские расходы (x_1), валовые инвестиции в основные фонды (x_2) и экспорт (x_3), а в качестве Y — валовой национальный продукт, который является наиболее общей характеристикой развития макроэкономической системы [15]. (Исходные данные обезразмерены путём деления на соответствующие показатели в 1971 г.)

Компьютерная реализация работы регулятора по принципу обратной связи дала следующие результаты. Оптимальными параметрами, на которые настроилась модель (3.10), (3.14), оказались следующие: $\hat{\lambda} = 0.0605, \hat{w} = 0.1034, \hat{\mu} = 0.2011$. При этом разложение (3.2) после процедуры рафинирования принимает вид:

$$\underset{(\text{с.о.})}{x_1(t)} = \underset{(1.0850)}{7.5761} + \underset{(0.4179)}{4.6306} \cos \hat{w}t + \underset{(1.4766)}{5.5982} \sin \hat{w}t - \underset{(1.1294)}{3.8640}\, e^{\hat{\lambda}t} \cos \hat{\mu}t + \underset{(0.6821)}{3.3781}\, e^{\hat{\lambda}t} \sin \hat{\mu}t,$$

$$\underset{(\text{с.о.})}{x_2(t)} = \underset{(1.0850)}{9.1352} + \underset{(0.4238)}{5.5186} \cos \hat{w}t + \underset{(1.4865)}{7.5236} \sin \hat{w}t - \underset{(1.1374)}{5.6138}\, e^{\hat{\lambda}t} \cos \hat{\mu}t + \underset{(0.6623)}{5.3533}\, e^{\hat{\lambda}t} \sin \hat{\mu}t,$$

$$\underset{(\text{с.о.})}{x_3(t)} = \underset{(7.3074)}{21.6225} + \underset{(4.5368)}{15.6792} \cos \hat{w}t + \underset{(2.6458)}{7.9913} \sin \hat{w}t - \underset{(11.7989)}{21.7651}\, e^{\hat{\lambda}t} + \underset{(2.1811)}{9.1218}\, e^{\hat{\lambda}} \sin \hat{\mu}t.$$

Здесь в скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов разложения [7]. По критерию Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0.05$ коэффициенты разложения оказываются значимыми. Коэффициенты детерминации составляют: $R^2 = 0.9778$ для x_1, $R^2 = 0.9735$ для x_2 и $R^2 = 0.9864$ для x_3. Это свидетельствует о высоком качестве предложенной модели и возможности её использования для восстановления параметров динамической системы.

Используя формулы (3.3)-(3.5), находим

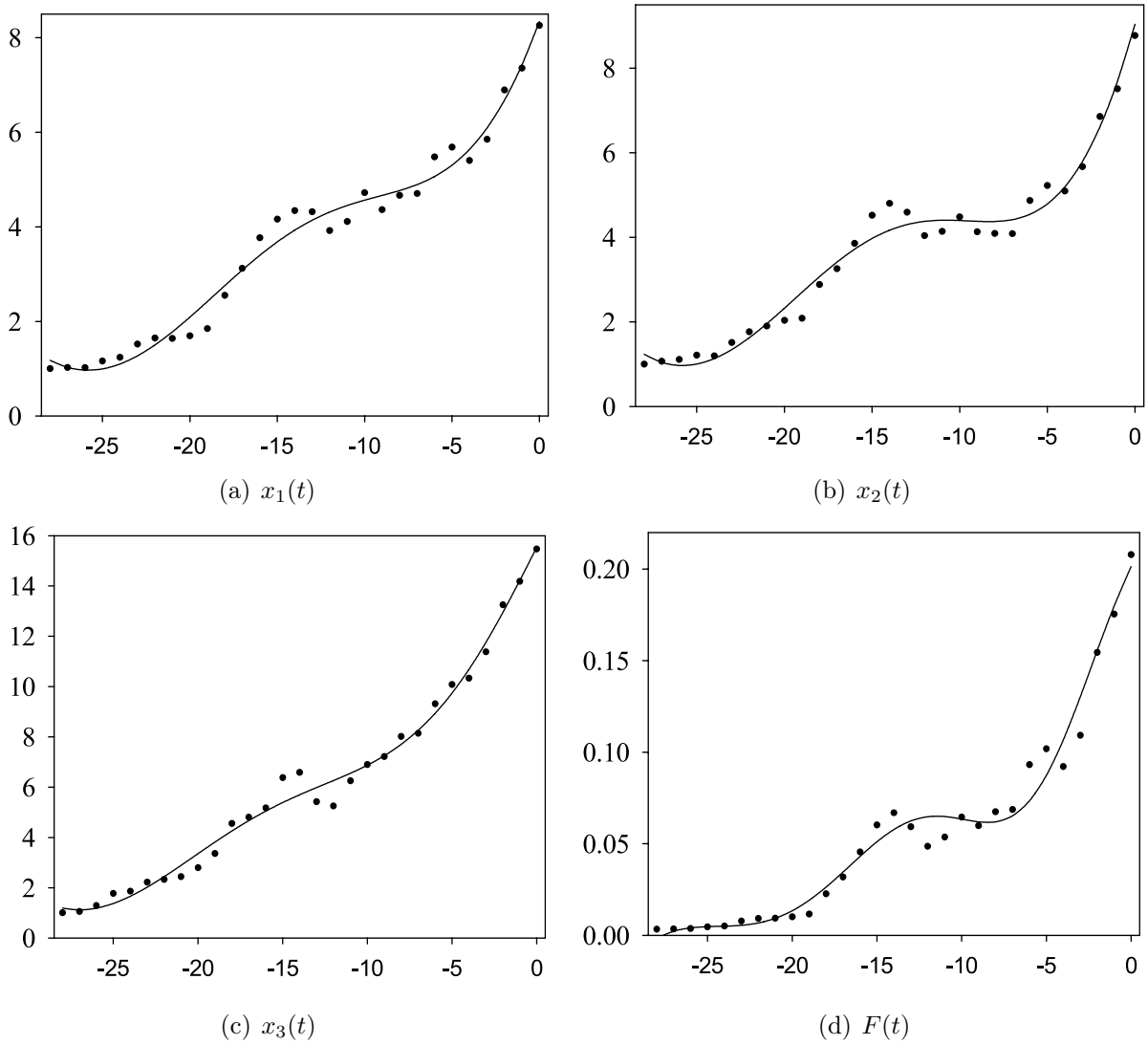
$$A = \begin{bmatrix} -3.7265 & 2.4026 & 0.2906 \\ -5.1686 & 3.3541 & 0.3939 \\ -3.2548 & 1.8179 & 0.3724 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 8.3427 \\ 9.0400 \\ 15.5365 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.2661 & -0.7643 & 0.7720 \\ 1.5672 & -1.5843 & 0.6153 \\ -1.3756 & -0.0304 & 1.3782 \end{bmatrix}, \ \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 6.0897 \\ 8.5019 \\ 6.2521 \end{bmatrix}.$$

Столбец $\mathbf{x}(0)$ содержит прогнозные значения фазовых координат. Относительные доверительные интервалы (3.17) прогнозов составляют $\pm 11.9453\%$, $\pm 11.9083\%$ и $\pm 8.6234\%$ соответственно. Сравнивая реальные значения фазовых координат в точке $t = 0$ с прогнозом $\mathbf{x}(0)$, видим, что реальные значения лежат внутри доверительного интервала, а фактические относительные ошибки прогноза составляют 1.0131%, 2.4784% и 0.4492% соответственно. Это свидетельствует о достаточно высоких прогнозных свойствах модели и возможности её использования для задания начальных условий LQ-модели. На рис. 2(a)-2(c) точками представлены реальные, а кривыми — модельные значения фазовых траекторий. Точками в момент времени $t = 0$ обозначены реальные данные за 1999 г.

Далее, чтобы оценить оставшиеся неизвестными параметры модели (3.10), идентифицируем функцию качества (3.16). Выберем в (3.15) значение $l = 0.1$. Тем самым предполагается, что максимальные значения управлений на базовом периоде составляют не более 10% соответствующих значений фазовых координат. В результате работы регулятора, установлено, что оптимальным классом матрицы K является симметричная матрица с разными элементами по главной диагонали

и одинаковыми элементами вне её. Также было установлено, что лучший результат получается, если экспоненциальный тренд относить к управлению $\mathbf{u}(t)$. Оптимальное значение коэффициента пропорциональности k модели (3.16) оказалось равным 0.015.



(a) $x_1(t)$ (b) $x_2(t)$

(c) $x_3(t)$ (d) $F(t)$

Рис. 2. Реальные и модельные значения фазовых траекторий и потенциала системы

Численный эксперимент по оцениванию модели (3.16) показал, что все коэффициенты разложения являются статистически значимыми и искомое представление

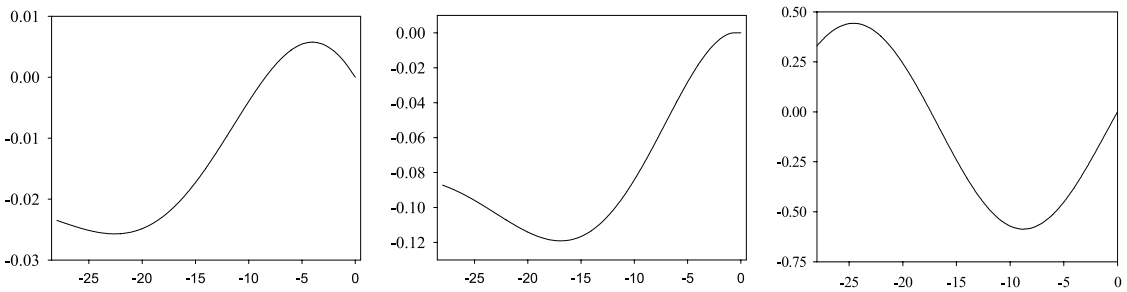
принимает вид:

$$\underset{(\text{с.о.})}{F(t)} = \underset{(0.2115)}{0.4903} + \underset{(0.0069)}{0.0183}t + (\mathbf{z}_0'(t) - \frac{1}{2}\mathbf{z}'(t)) \begin{bmatrix} \underset{(0.0404)}{0.2740} & \underset{(0.0184)}{-0.1114} & \underset{(0.0184)}{-0.1114} \\ \underset{(0.0184)}{-0.1114} & \underset{(0.0336)}{0.1732} & \underset{(0.0184)}{-0.1114} \\ \underset{(0.0184)}{-0.1114} & \underset{(0.0184)}{-0.1114} & \underset{(0.0374)}{0.2427} \end{bmatrix} \mathbf{z}(t).$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0.9729$ свидетельствует о качестве модели (3.16). Прогнозное значение $F(0) = 0.2014$. Фактическая относительная ошибка прогноза составляет 1.5681%. На рис. 2(d) изображен график функции качества F и соответствующая диаграмма рассеивания. Таким образом, система (3.10) становится полностью определённой:

$$D = \begin{bmatrix} 0.1469 & -0.0862 & -0.0154 \\ 0.8158 & -0.9366 & -0.6031 \\ -1.0823 & 1.3180 & 0.8497 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} 0.0255 \\ 0.0980 \\ 0.1079 \end{bmatrix}.$$

Решение системы дифференциальных уравнений для управления $\mathbf{u}(t)$ изображено на рис. 3.



(a) $u_1(t)$ (b) $u_2(t)$ (c) $u_3(t)$

Рис. 3. Модельные кривые управлений

5. Выводы

В работе предложен и апробирован подход к спецификации и идентификации стационарных LQ-моделей в трёхмерном фазовом пространстве в случае неизвестных управлений. Для настройки модели на заданный набор свойств предложена схема мультикритериального регулятора, действующего по принципу обратной связи. Компьютерная реализация, проведенная на реальных статистических данных, продемонстрировала эффективность предложенных алгоритмов. Кроме того, процедуры индентификации моделей с помощью коллокационных методов были

сведены к МНК для линейных регрессий, что позволило использовать классические статистические тесты для рафинирования модели и проверки её на адекватность. В дальнейшем методы, предложенные в данной работе, могут быть обобщены для случая m-мерных фазовых пространств ($m > 3$) и использованы для построения LQ-моделей оптимального управления.

Список цитируемых источников

1. *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов [http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/005.pdf] // Электронный журнал "Исследовано в России". — 2002. — Т. 5. — С. 54-86.
2. *Анищенко В.С.* Детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 6. — С. 70-76.
3. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. Изд. 4-е, исправл. — М.: Наука, 2004. — 591 с.
4. *Белозеров В.Е., Корнеев М.В.* Об устойчивсти решений линейных нестационаных уравнений с обратной связью // Динамические системы: межвед. научн. сборник. — ТНУ, 2006. — Вып. 20. — С. 3–19.
5. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление: Пер. с англ. Макашова Э.М., Плотникова Ю.П. — М.: Мир, 1972. — 545 с.
6. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. — М.: Наука, 1988. — 328 с.
7. *Назаренко О.М.* Основи економетрики. Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. — К.: Центр навчальної літератури, 2005. — 392 с.
8. *Назаренко О.М.* Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем // Вісник Харк. нац. ун-ту. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2008. — Т. 10, № 833. — С. 185–192.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач: Изд. 3-е, испр. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
10. *Bates D.M., Watts D.B.* Nonlinear Regression Analysis and Its Applications. — N.Y.: Wiley, 1988. — 365 p.
11. *Hamilton J.D.* Time Series Analysis. — N.J.: Princeton University Press, 1994. — 800 p.
12. *Ljung L.* System Identification. Theory for the user. 2nd ed. — N.J.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999. — 432 p.
13. *J.O. Ramsay, et al.* Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach. // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. — 2007. — Vol. 69, N. 5. — P. 741–796.
14. *Nazarenko O.M., Filchenko D.V.* Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective. // International Journal of Innovating Computing, Information and Control. — 2008. — Vol. 4, N. 7. — P. 1553–1566.
15. *Eurostat*'s Web Site. — `http://epp.eurostat.ec.europa.eu`.

Получена 21.03.2009